

# Bölüm 5 Ekstra Materyal

## — Giriş —

Derslerin özellikle kısa tutulan açıklamalarda daha fazla örnek, tartışma ve yorum olmasını isteyen biri misiniz? Eğer öyleyse, bu dosya 4.bölümdeki bazı etkinlikler için ek materyaller içermektedir.

Bulmacalar için birçok çözülmüş bulmaca örnekleri ve bunları nasıl oluşturabileceğinizle ilgili ek yorumlar verilmiştir. The Early Family Math programı erken matematiğin bir ailenin birlikte yapması gereken bir etkinlik olduğu fikrine dayanmaktadır ve çocuğunuzla birlikte çözebileceğiniz bulmacalar hazırlamak bu sürecin önemli bir parçasıdır. Her bir bulmacayı kavradığınızda, bulmacaların çoğunu hatta tamamının sizin için oldukça kolay olduğunu göreceksiniz.

Bu bulmacaların birçoğunun farklı derecelerde zorluk seviyeleri var, ve ilerleyen sayfalarda bu bulmacaları nasıl oluşturabileceğinize dair birçok öneri ve örnekler bulunmaktadır. Daima en kolay olan bulmacalar ile başlayın.Çocuğunuzun biraz fazla kolay bulmacalarla başarı, anlayış ve eğlence deneyimini yaşaması, çok zor bulmacalarla hayal kırıklığına uğramasına, cesaretinin kırılması ve aşırı zorlanmasından çok daha iyidir. Çocuğunuz bir matematik etkinliğine karşı güven ve heyecan geliştirinde, yavaş yavaş daha büyük zorluklar eklemenin zamanı gelmiştir. Ayrıca, her bulmaca herkes için olmayacaktır , bu yüzden çocuğunuzun ilgisini çekmeyen bulmacaları ve etkinlikleri zorlamayın.

Sonraki sayfalarda şu etkinlikleri bulacaksınız :

- **Bölüm 5 – Çarpanlarla Nim**
- **Bölüm 5 – Eratosthenes Kalburu**
- **Bölüm 5 – Kaldıraçlar ve Denge Oyuncakları**
- **Bölüm 5 – Kutuyu Böl**
- **Bölüm 5 –Harf Değiştirme Bulmacaları**
- **Bölüm 5 – Araştırmalar - Şekillerle Oynamak**
- **Bölüm 5 – Çarpım Oyunu**
- **Bölüm 5 –Sınırlı Hesap Makineleri**
- **Bölüm 5 –Ya Hep Ya Hiç**

---

## — Yasal Haklar —

Her ailenin birlikte matematik öğrenme ve keyif alma fırsatına sahip olması gerekir. Early Family Math, bu materyalleri ailelerin ve eğitimcilerin, izin almadan, yalnızca ticari olmayan kullanımlar için düzenlemeleri, çevirmeleri, kopyalamaları ve dağıtmaları için sağlar.

© Copyright Early Family Math - 2025 v. 1.2 Creative Commons: Attribution-NonCommercial 4.0 International License

# Bölüm 5 – Çarpanlarla Nim

## — Giriş —

Herhangi bir sayıyla başlayın, örneğin 20. Çocuğun ilk ya da ikinci olarak başlamak istediğine karar vermesine izin verin. Sırası gelen oyuncu, mevcut sayının herhangi bir bölenini sayıdan çıkarabilir. Sıfıra ulaşmak zorunda kalan oyuncu oyunu kaybeder.

## — Analiz —

Her zamanki gibi, bu oyunu öğrenmenin iyi bir yolu daha basit bir versiyonla başlamaktır. Bu da çok küçük sayılarla denemek anlamına gelir. Eğer sıra sizdeyse ve karşınızda bu sayılar varsa neler olur bakalım: 1 - kaybedersiniz, 2 - kazanırsınız, 3 - kaybedersiniz, 4 - kazanırsınız, 5 - kaybedersiniz, 6 - kazanırsınız, 7 kaybedersiniz, and 8 kazanırsınız. Artık örüntü netleşmiştir: Sıra sizdeyken elinizdeki sayı tekse kaybedersiniz, çiftse kazanırsınız.

Kazanma stratejisini bulmak büyük bir adım ama biraz daha derine inelim. Bu neden işe yarar? Tek ve çift sayıların bu durumu ortaya çıkaran özellikleri nelerdir? Bu soruyu çocuğunuza sorun ve üzerine düşünmesi için ona bolca zaman tanıyın. Ancak aceleye gerek yok, bu tür sorularla uğraşmak başlı başına çok değerlidir ve hızlıca atlanıp geçilmemelidir.

Küçük sayılarla yapılan birkaç deneme işin özünü hızla ortaya çıkarır. Bu nedenle tek bir sayı, bir sonraki turda mutlaka çift bir sayıya dönüşür. Çift sayılar ise hem tek hem de çift bölenlere sahiptir. Yani durum tam olarak aynı değildir. Ancak eğer çift bir sayıya sahipseniz, hedefiniz rakibinize tek bir sayı bırakmaktır ve bunu yapmanın en kolay yolu 1'i bölen olarak seçip çıkarmaktır.

# Bölüm 5 – Eratosthenes Kalburu

## — Giriş —

1'den 25'e kadar (ya da alan ve sabrınız el veriyorsa daha geniş bir aralıkta) numaralanmış bir sayı doğrusu oluşturun.

2 sayısını 2'nin alt satırına yazın. Bu 2'nin hizasında, 2'nin katı olan sayıların altına X işareti koyun.

Şimdi, altında X olmayan ilk sayıyı alın (bu durumda 3) ve onu bir sonraki satıra yazın. Write the 3 and put X's on that line for all its multiples. 3'ü yazın ve onun katlarının altına da X koyun. Bu şekilde devam edin. Sonunda, *asal* sayıların hepsini “aşağı çekmiş” olacaksınız. Unutmayın: 1 *birim* sayıdır, *asal* değildir!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	2	↓	X	↓	X	↓	X		X	↓	X	↓	X		X	↓	X	↓	X		X	↓	X	
		3		↓	X			X		↓	X			X		↓	X		X		X			X
				5		↓			X		↓			X		↓			X		X			X
						7				↓				X		↓			X		X			X
										11				X		↓			X		X			X
											13			X		↓			X		X			X
												17		X		↓			X		X			X
													19	X		↓			X		X			X
														X		↓			X		X			X
															X	23			X		X			X

## — Analiz —

Bu basit işlem, asal sayılarla ilgili ilginç gerçekleri açığa çıkarır. Çocuğunuzun bazı soruları kendiliğinden sormasını teşvik edin. Ancak eğer bu sorular kendiliğinden ortaya çıkmazsa, işte sorabileceğiniz bazı örnekler:

1) Aşağı çekilen sayılar neden asal sayıdır?

Bir bileşik sayı düşünelim. Altında X işareti olduğunu göstermek istiyoruz. Bileşik olduğu için, kendisiyle 1 arasında bir sayıya (n) tam bölünmelidir. Eğer n asal bir sayıysa, bu sayı zaten daha önceki bir asal sayının katı olarak X ile işaretlenmiş olurdu. Eğer n asal değilse, daha önceki bir asal sayı olan p tarafından bölünüyor olmalıdır. Bu durumda p, n'yi böler, n de bileşik sayımızı böler. Dolayısıyla p de bileşik sayıyı böler. O hâlde p'nin katlarını işaretlerken bu sayı da X almış olurdu.

2) Bir asal sayının katlarını işaretlerken bazı sayılar neden zaten X almış olur?

5'in katlarına bakalım.  $5 \times 2$ ,  $5 \times 3$  ve  $5 \times 4$  zaten işaretlenmişti. Yalnızca  $5 \times 5$  yeni olur. Bunun nedeni,  $5 \times 2$ ,  $5 \times 3$  ve  $5 \times 4$ 'ün zaten 2 ve 3 gibi önceki asal sayıların katı olmasıdır. Eğer yeni yerlere X koymak istiyorsak, çarpılan sayının asal çarpanları yalnızca 5 veya daha büyük olmalıdır. Bu takip işi biraz uğraştırıcı olabileceğinden, bazı kişiler yalnızca tek sayı katlarını işaretlemeyi tercih eder.

3) Bu kalburda yararlı yeni X'ler koyabilen son asal sayı hangisiydi?

Bu kalburda yararlı X'lere sahip asal sayılar 2, 3 ve 5'tir. 7 ve 11'in katları zaten daha önce işaretlenmişti. Bir önceki sorunun cevabına bakarsanız, buradaki cevabı da anlayabilirsiniz. Yeni X'ler elde etmenin tek yolu, bir asal sayıyı kendisine eşit veya daha büyük asal sayılarla çarpmaktır. Eğer ulaştığınız asal sayı öyle bir sayıysa ki, kendisiyle çarpımı kontrol aralığını aşıyorsa (örneğin  $7 \times 7 > 25$ ), o zaman artık işaretleme yapmaya gerek kalmaz. Yani sadece karesi son sayıya eşit ya da daha küçük olan asal sayılar kontrol edilmelidir.

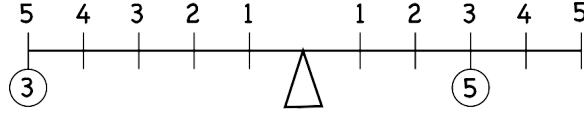
4) Örneğin 53 gibi bir sayının asal olup olmadığını nasıl anlarsınız?

Bir önceki sorunun cevabına göre, yalnızca karesi 53'ten küçük ya da eşit olan asal sayılarla bölen kontrolü yapmamız yeterlidir. Bu asal sayılar 2, 3, 5 ve 7'dir. Bu sayıların hiçbiri 53'ü tam bölmediğine göre, 53 bir asal sayıdır!

# Bölüm 5 – Kaldıraçlar ve Denge Oyuncukları

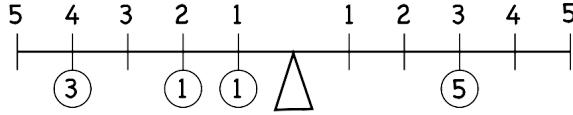
## — Kaldıraçlar —

Kaldıraç prensibi, bir kütlenin kaldıraçın bir tarafında uyguladığı kuvvetin, kütle ile destek noktası (fulkrum) arasındaki uzaklığın çarpımına eşit olduğunu söyler.



Yukarıdaki kaldıraçta, sol tarafta bulunan 3 birimlik ağırlık fulkrama 5 birim uzaktadır; bu durumda uyguladığı kuvvet  $3 \times 5 = 15$ 'tir. Sağ taraftaki 5 birimlik ağırlık ise fulkrama 3 birim uzaktadır ve onun kuvveti de  $5 \times 3 = 15$ 'tir. Bu nedenle kaldıraç dengededir.

Eğer bir tarafta birden fazla ağırlık varsa, bu ağırlıkların oluşturduğu kuvvetler toplanır.



Örneğin bu kaldıraçta, sol tarafta  $3 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 15$ , sağ tarafta ise  $5 \times 3 = 15$  kuvvet vardır. Dolayısıyla sistem yine dengededir.

Bu bulmacalarda yalnızca tam sayılar kullanılacaktır. Aynı noktaya birden fazla ağırlık asılıp asılamayacağına siz karar verebilirsiniz. Biz, eden örneklerde bunun mümkün olduğunu varsayacağız.

## — Kaldıraç Bulmacaları —

Destek noktasının karşılıklı taraflarına yerleştirmek üzere 3 birimlik ve 5 birimlik ağırlıklarınız var. Dengeyi sağlamak için bunları hangi mesafelere yerleştirmelisiniz? Cevap 5 ve 3 olabilir, ama aynı zamanda 10 ve 6 ya da 15 ve 9 gibi daha büyük sayılar da olabilir. Çocuğunuzun getirdiği her çözüm fikrine açık olun ve birlikte tartışın.

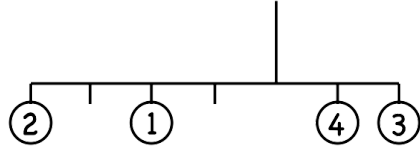
Peki ya kaldıraçın bir tarafına 3 ve 5 birimlik ağırlıkları birlikte koyarsanız, diğer tarafa hangi ağırlıkları hangi uzaklıklara koyabilirsiniz? Bu soru, Bölüm 4'ün sonundaki "Topla Hesapla" sayfasındaki soruların bir devamıdır. Yine, farklı ağırlık kombinasyonlarını keşfedin. 3 ve 5 yerine 4 ve 5, 4 ve 9 ya da 6 ve 9 kullanırsanız ne olur?

Son örnekte, 3 ve 5 birimlik ağırlıkları kaldıraçın zıt taraflarına yerleştirirsek durum nasıl değişir? Bu durumda,  $3 \times 2 = 5 \times 1 + 1 \times 1$  eşitliğiyle 1 birimlik bir ağırlığı dengelemek oldukça kolaydır. Bu yöntemi kullanarak başka hangi ağırlıkları dengeleyebilirsiniz?

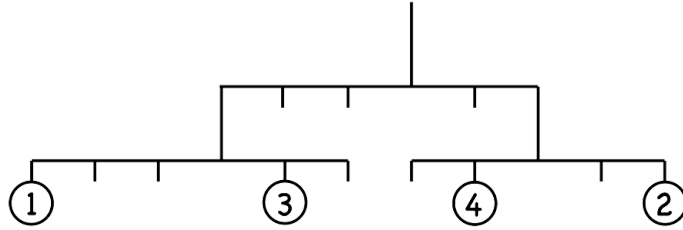
## — Mobiller —

Size bazı ağırlıklar ve bağlantı noktaları bulunan bir mobil tasarımı verilir. Amaç, her bağlantı noktasına en fazla bir ağırlık yerleştirerek mobilin tüm kollarının dengede kalmasını sağlamaktır. Bu tür sorular için mobilin tellerinin ağırlıksız olduğunu varsayacağız. Mobildeki her kol, dengelenmesi gereken bir kaldıraç gibi çalışır. Bu nedenle bu bulmacalar, Kaldıraç Dengesi bulmacalarının bir uzantısıdır. Bunlara geçmeden önce o bölümdeki örnekleri denemeniz faydalı olur.

En basit mobiller, havadaki kaldıraçlar gibidir. İşte 1'den 4'e kadar olan ağırlıkları bu mobile yerleştirerek denge sağlamanın bir yolu: Asılma noktası denge noktası olarak çalışır. Bu durumda,  $2 \times 4 + 1 \times 2 = 4 \times 1 + 3 \times 2$  eşitliği sağlanır.

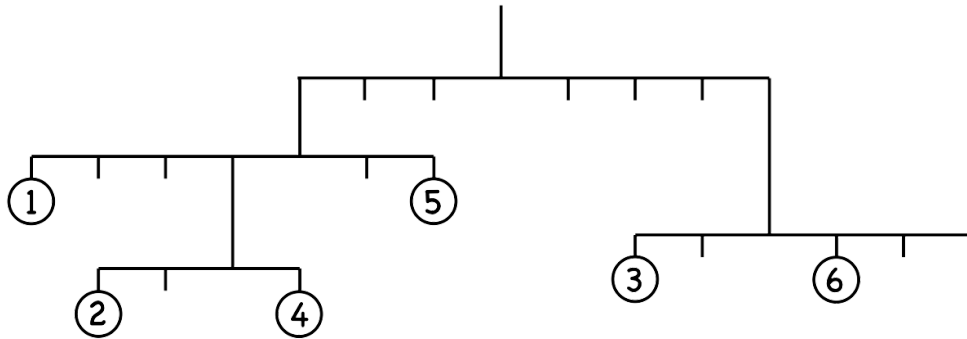


Mobilde birden fazla seviye varsa, her seviyedeki her kol kendi içinde dengede olmalıdır. Bir sonraki örnekte, alt seviyedeki iki kol dengededir çünkü  $1 \times 3 = 3 \times 1$  ve  $4 \times 1 = 2 \times 2$ . Üst seviyeye geçerken, sadece alt koldaki toplam ağırlık dikkate alınır. Örneğin, sol kolun toplam ağırlığı  $1 + 3 = 4$ 'tür – üst seviye açısından bu ağırlıkların kol üzerindeki konumları önemli değildir. Bu durumda,  $(1 + 3) \times 3 = (4 + 2) \times 2 = 12$ , yani üst seviye de dengededir.



Birbiriniz için mobil bulmacaları hazırlamak çok keyifli olabilir. İşte 1'den 6'ya kadar olan sayıların her birinin kullanıldığı son bir örnek. Her sayıyı yalnızca bir kez kullanma konusunda endişelenmeyin. Tamamlanan her bulmaca eğlenceli olacaktır.

Seviyelere bakalım:  $2 \times 2 = 4 \times 1$ ;  $1 \times 4 + (2 + 4) \times 1 = 5 \times 2$ ;  $3 \times 2 = 6 \times 1$ ; ve  $(1 + 2 + 4 + 5) \times 3 = (3 + 6) \times 4$ .



# Bölüm 5 – Kutuyu Böl

## — Giriş —

Elimizde 4x4 ya da daha büyük boyutta bir dikdörtgen ve dikdörtgenin bazı karelerinde sayılar vardır. Görevimiz, bu dikdörtgeni daha küçük dikdörtgenlere ayırmaktır. Her sayı, alanı o sayıya eşit olan ayrı bir dikdörtgenin içinde yer almalıdır.

Yetişkinler için bu tür bulmacalar üretmek oldukça kolaydır. Büyük bir dikdörtgen alın, içini küçük dikdörtgenlere ayırın, her birinin içine alanlarını belirten sayılar yerleştirin ve sonra bu iç dikdörtgenlerin sınırlarını silin. Asıl zorluk, sayıları öyle bir şekilde yerleştirmektir ki bulmacayı çözmek mümkün ve makul ölçüde kolay olsun. Eğer çok zorlayıcı olursa, gerektiğinde ipuçları verebilirsiniz.

## — Çözüm Stratejileri —

Bu tür bulmacaları çözerken işinize yarayabilecek bazı genel stratejiler aşağıdadır. Çocuğunuzun bu kuralları oynarken kendi başına keşfetmesine fırsat tanıyın. Birlikte, fark ettikleri kuralları bir liste hâline getirebilirsiniz.

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

			3
	4	3	
	2		
4			

1) Yalnızca bir ya da iki ihtimali olan sayılara odaklanın.

Her iki 4 de oldukça sınırlıdır. Bir 4 yalnızca 1x4 ya da 2x2 boyutundaki bir dikdörtgenin içinde olabilir. Üstteki 4 sıkışmış durumda; bu nedenle yatay bir 1x4'e sığmaz. Öyleyse sol üst köşede bir 2x2 dikdörtgen olmalıdır. Bu da alttaki 4'ün, alt kenar boyunca uzanan bir 1x4 olması gerektiğini gösterir.

2) Asal sayılara odaklanın. Genellikle yalnızca 1xn biçiminde yerleştirilebilir.

Yukarıdaki örnekteki 3'ler, yalnızca 1x3 boyutunda bir dikdörtgende yer alabilir. Sağ üst köşedeki 3, ya üst kenar boyunca ya da sağ kenar boyunca yerleştirilebilir. Ancak sol üstteki 2x2 alan 4'e ayrıldığı için, üst kenarda bir 1x3'e yer kalmaz.

Ayrıca, alt sıradaki 1x4'lük dikdörtgenin yerleştirilmiş olması, aşağıdaki 3'ün 1x3'lük dikdörtgeninin iki dikey seçeneğinden üstte olanı olmak zorunda olduğunu gösterir.

		3	6		2
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

		3	6	2	
				3	5
	6				
		5			
	4			2	

3) Maksimum boyuta yakın sayılar genellikle daha az seçeneğe sahiptir.

Aşağıdaki bulmacadaki 5'lere ve 6'lara bakalım. En üstteki 6, oldukça fazla alana ihtiyaç duyar ve yeterli alan sadece sütun boyunca dikey bir şekilde aşağıya doğru uzandığında vardır. Bu 6, tüm sütunu kaplar. Diğer 6 için artık yatay bir 1x6 mümkün değildir çünkü o satır diğer 6 tarafından kesilmiştir. Dolayısıyla alttaki 6, 2x3'lük bir dikdörtgende olmalıdır. Bu henüz kesinleşmemiş olabilir.

Bir başka örnek olarak, eğer bu bulmacada bir 8 olsaydı, 1x8 sığmayacağı için 2x4'lük bir dikdörtgende yer alması gerekirdi.

4) Çevresi kapalı karelerin seçeneği daha azdır.

En üstteki 5, etrafı kapalı olduğu için yalnızca dikey bir şekilde, 5 karelik bir sütunda yer alabilir. Diğer 5 ise asal bir sayı olduğu için yalnızca yatay veya dikey olarak yerleşebilir. Ancak yatay yön, 6'ya ayrılan sütun tarafından engellenmiş olduğundan, bu 5 yukarı doğru, 3'ün hemen altına kadar dikey yerleşmelidir.

5) Köşelerdeki sayılar genellikle çok sınırlıdır.

Sağ üst köşedeki 2 yalnızca yatay olarak yerleşebilir. Bu da çözümünü kolaylaştırır.

# Bölüm 5 – Harf Değiştirme Bulmacaları

## – Giriş –

Çocuğunuz bu bölümde birkaç sayfa önce karşılaştığı Eksik Sayı bulmacalarıyla rahatça oynamaya başladıysa, artık bu yeni türle de tanışabilir. Bu bulmacalarda, bir ya da daha fazla rakam harflerle değiştirilmiştir. Harflerle ilgili üç temel kural vardır:

- Aynı harf her zaman aynı rakamı temsil eder.
- Bir sayının en soldaki rakamı hiçbir zaman 0 olamaz.
- Farklı harfler farklı rakamları temsil etmelidir.

Bu tür bulmacaları üretmek için basit bir toplama ya da çıkarma işlemi seçin ve bir ya da birden fazla rakamı harflerle değiştirin. Dilerseniz, çocuğunuz için ilginç mantık soruları yaratmak amacıyla daha özgün düzenlemeler de yapabilirsiniz. Unutmayın: harflerin temsil ettiği rakamlar, her yeni bulmacada değişebilir. Yani bir bulmacadaki harf kodlaması diğerine taşınmaz.

## – Örnekler –

İlk örnek, sıradan bir toplama ya da çıkarma işleminin nasıl harfli bir bulmacaya dönüştürülebileceğini gösteriyor. İlk versiyonda tüm 6'lar A harfiyle değiştirilmiş; ikinci versiyonda ise 2'ler B harfiyle yer değiştirmiş.

$$\begin{array}{r} 23 \\ +46 \\ \hline 69 \end{array} \quad \dashrightarrow \quad \begin{array}{r} 23 \quad B3 \\ +4A \quad +4A \\ \hline A9 \quad A9 \end{array}$$

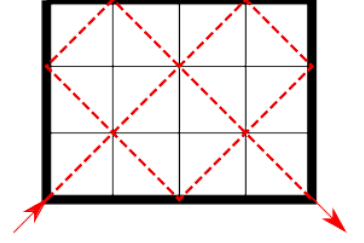
Bu bölümdeki diğer örnekler, her birinin içinde bulunduğu duruma ait özel ipuçları kullanılarak çözülebilecek şekilde dikkatle hazırlanmıştır. Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta: İki sayıyı toplarken, bir sonraki sütuna geçecek olan elde daima 0 ya da 1 olabilir. Örneğin  $A + A = C4$  gibi bir soruda, C'nin 0 olamayacağı belirtildiği için, C kesinlikle 1 olmalıdır.

$$\begin{array}{r} B \quad B \quad A \quad A \quad D \quad A \\ +8 \quad +B \quad +A \quad +2 \quad +2 \quad +B \\ \hline C \quad 8 \quad C4 \quad BC \quad EE \quad AC \end{array}$$
$$\begin{array}{r} A \quad C \quad A \quad A \\ A \quad C \quad A \quad A \quad A \quad B \\ +A \quad +C \quad +7 \quad +B \quad +BB \quad +AB \\ \hline B2 \quad D4 \quad B \quad B0 \quad A7 \quad BA \end{array}$$
$$\begin{array}{r} BA \quad AD \quad AA \quad AA \quad AA \quad AA \\ +BB \quad +BD \quad +BA \quad +CB \quad +AB \quad +AA \\ \hline CAB \quad BCC \quad BBC \quad BBC \quad CAC \quad BBC \end{array}$$

# Bölüm 5 – Şekillerle Oynamak

## — Zıplayan Bilardo Topu – Giriş —

Köşelerinde birer delik bulunan bir bilardo masası hayal edin. Top, masanın kenarına çarptığında geldiği açıyla aynı açıyla sekerek yoluna devam eder. Peki, sol alt köşeden 45 derecelik bir açıyla vurulan bir top, sonunda hangi köşeye varır? Cevap, masanın boyutlarına bağlıdır. Sağdaki resim, 3 x 4 boyutundaki bir masada ne olduğunu gösteriyor.



Çocuğunuza bir masa çizimi verin. Hangi köşeye ilk olarak çarpacağını ve o köşeye ulaşmadan önce kaç sekme yapacağını tahmin etmesini isteyin.

## — Zıplayan Bilardo Topu – Analiz —

Öncelikle çocuğunuzun bu fikirle serbestçe oynamasına izin verin ve sonuçlara ulaşmak için acele etmeyin. Göreceğiniz gibi, bu problem genç yaşta biri için oldukça gelişmiş fikirler içeriyor. Gerektiğinde bir iki soru sorarak düşüncelerini biraz daha yapılandırmasına yardımcı olun. Neler olacağını tahmin ediyorsunuzdur: önce daha basit masalara bakarak desenleri aramak. Bu fikir çocuğunuz için otomatik hâle geldiğinde, hayatı boyunca ona fayda sağlayacaktır!

En basit masalar 1 x n boyutundakilerdir ve bunları anlamak kolaydır. Farklı n değerleriyle oynadığınızda, desen hızla ortaya çıkar. Bu tür basit bir sonucu küçümsemek kolay olabilir; ancak tamamen kavranmış her sonuç kutlanmayı hak eder ve bu sonuç sizi başka keşiflere de götürebilir.

**Sonuç:** 1 x n masasında: Top n-1 kez seker. n çiftse sağ alt köşede, tekse sağ üst köşede durur.

Bir sonraki en basit masalar 2 x n olanlardır. Buradaki desenler biraz daha karmaşıktır. Bu tür durumlarda düzgün not tutmak büyük fark yaratabilir. Dikkatli bir gözlemci, 2 x 4 masasının 1 x 2 masa gibi davrandığını, 2 x 6 masasının da 1 x 3 gibi davrandığını fark edecektir. Bu gözlem hızla bir sonraki sonuca genelleştirilebilir:

**Sonuç:** 2 x (2xn) masaları, 1 x n masalarıyla aynı şekilde davranır.

Peki bu neden böyle? Bu, çocuğunuza kazandırmak isteyeceğiniz bir matematiksel düşünme sistemidir: Desenleri fark etmek, sonra bu desenleri anlamaya çalışmak ve ardından bu yeni anlayışla önceki sonuçları geliştirmek.

Burada olan şey şu: Eğer bir masanın hem yatay hem dikey boyutlarını aynı katsayıyla büyütürseniz, topun sekme düzeni değişmez. Masa daha büyük olur ama geometrisi aynı kalır. Geometri terimiyle söylersek, bu iki masa “benzer” kabul edilir.

**Sonuç:** (kxm) x (kxn) boyutundaki bir masa, m x n masası gibi davranır.

Buraya küçük adımlarla geldik ama bu BÜYÜK bir sonuç. Bu, herhangi bir masa üzerinde analiz yaparken önce ortak bölenleri sadeleştirerek işe başlayabileceğimiz anlamına gelir.

2 x n masalarıyla kaldığımız yerden devam edelim. n çift olduğunda ne olduğunu anladık, peki n tek olduğunda ne olur? n = 1, 3, 5, 7 ve benzeri değerler için 2 x n masasında ne olur? Desen hızla belirginleşir.

**Sonuç:** n tek olduğunda, 2 x n masasında top n kez seker ve sol üst köşede durur.

Büyük ilerleme kaydediyoruz. Daha fazla örnekle oynadıkça, yeni desenler ortaya çıkıyor.

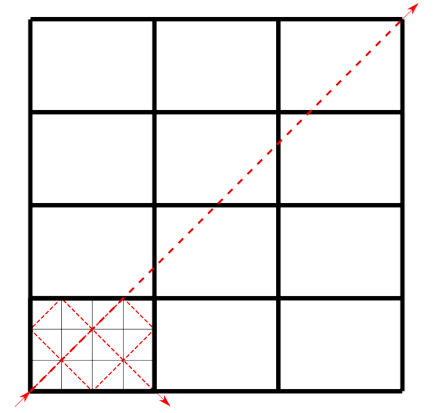
**Sonuç:** n, 3'ün katı değilse, 3 x n masasındaki top n + 1 kez seker ve n, 3'e bölündüğünde kalan 1 ise sağ üst köşede, kalan 2 ise sağ alt köşede durur. n tek olduğunda, 4 x n masasında top n + 2 kez seker ve sol üst köşede durur. n, 5'in katı değilse, 5 x n masasındaki top n + 3 kez seker ve n tekse sağ üst köşede, n çiftse sağ alt köşede durur.

Bu noktada elimizdeki verilere bakmak, bazı desenleri fark etmek ve tahminlerde bulunmak cazip hale gelir.

**Tahmin:** k ve n'nin ortak çarpanı olmadığını varsayalım. O zaman k x n masasında top k + n – 2 kez seker. k çiftse sol üst köşede, k ve n her ikisi de tekse sağ üst köşede, k tek ve n çiftse sağ alt köşede durur.

Vay canına! Eğer bu tahmin doğruysa, bu problemi tamamen çözmüş oluruz! Ne geleceğini biliyorsunuz... Hadi bu tahminin neden doğru olabileceğini açıklamaya çalışalım (ya da bunun yanlış olduğunu keşfedelim).

Bu durumu anlamanın başka yolları da vardır, ama bazen olduğu gibi, bu problemi çok daha kolay anlaşılır kılan yeni bir fikir vardır. Hemen aklınıza gelmeyebilir ama gördüğünüzde çok şaşıracaksınız. Fikir şu: Masayı katlayarak açmak ve topun düz bir çizgide hareket etmesine izin vermek! İşte orijinal 3 x 4 masayı açıp, topun yolunu düz bir çizgi hâline getirdiğimizde olanlar.



Bu tahminin doğru olduğunu görmek artık çok daha kolay. Topun sekmeleri, geçtiği çizgilere karşılık gelir: Bir yönde (k - 1), diğer yönde (n - 1) çizgi geçilir. Toplamda (k - 1) + (n - 1) = k + n - 2 çizgi geçilmiş olur. Topun hangi köşede duracağını görmek ise masanın nasıl açıldığını takip etme meselesidir. Oldukça ilginç bir yolculuğun ardından, bu bölümü tamamlamış oluyoruz.

## — Bölgeleri Şekillerle Doldurma – Giriş —

Bir 8 x 8 satranç tahtanız olduğunu ve elinizde 1 x 2 boyutunda dikdörtgen fayanslar bulunduğunu düşünün. Bu 1 x 2'lik fayanslardan 32 tanesiyle satranç tahtasını tam olarak kaplamanın bir yolunu bulmak oldukça kolaydır.

Şimdi tahtadan bazı kareleri çıkarmaya başlayalım ve neler olduğunu görelim. Eğer tahtanın bir köşesini çıkarırsanız, tahtayı fayanslarla kaplayamayacağınızı hemen fark edersiniz çünkü her fayans her zaman çift sayıda kare kaplar ve geriye artık 63 kare kalmıştır. Tamam, şimdi iki köşeyi çıkararak geriye çift sayıda kare bırakın. Bu durumda tahtayı kaplayabilir misiniz? Cevap, hangi iki köşeyi çıkardığınıza bağlıdır. Neden? Peki ya kendinizi sadece köşe çıkarmakla sınırlamazsanız ne olur?

## — Bölgeleri Şekillerle Doldurma – Analiz —

Renklendirme fikrini ortaya atmadan önce çocuğunuzun bu fikirle oynamasına izin verin. Daha küçük boyutlardaki tahtalarla oynarlarsa, kuralı kendi başlarına keşfetmeleri mümkündür ve bu her zaman daha iyidir.

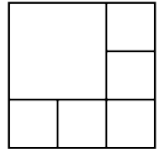
Bu sorunun çözümünde oldukça yardımcı olan bir gözlem, satranç tahtasındaki karelerin renklendirilmesidir. 1 x 2'lik bir fayansı alıp bir karesini beyaz, diğerini siyah olarak düşündüğünüzde ilginç bir durum ortaya çıkar. Her fayans mutlaka iki farklı renkten kare kaplamak zorundadır. Ayrıca, k tane fayans sadece 2 x k kadar kare kaplamakla kalmaz, aynı zamanda k beyaz ve k siyah kare kaplar; her renkten eşit sayıda. Bu fikirle yola çıktığınızda, eğer tahtadan bir renkten daha fazla kare çıkarılmışsa, tahtayı kaplamak imkânsız hâle gelir.

Çocuğunuz bu tarz sorulardan keyif alıyorsa, başka şekillerle tahtayı doldurma yollarını keşfetmeye başlayabilirsiniz. 1 x 3 boyutundaki fayanslarla veya L şeklinde üç kareyle doldurmayı deneyin. Bu şekillerle ne tür desenler ve kurallar keşfediliyor? Oynamak için başka hangi şekiller ilginç olabilir?

## — Bölgeleri Karelerle Doldurma – Giriş —

Bir kareyi, kenar uzunlukları farklı olsa da başka karelerle doldurmanın kaç farklı yolu olabilir? Ancak bu karelerin kenar uzunlukları tamamen rastgele olamaz. Her karenin kenarı, sabit bir uzunluğun tam sayı katı olmak zorundadır. Bu çalışmada sorulacak soru şu: Kaç farklı kare sayısı mümkündür? Ayrıca, eğer bir sayının mümkün olduğunu biliyorsak, onu bulmanın kolay bir tarifi olabilir mi?

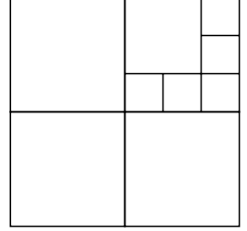
Çocuğunuzun bu fikirle günlerce oynamasına izin verin ve cevaba ulaşmak için acele etmeyin. Bu sorunun üzerine düşünmek için birçok farklı yaklaşım kullanılabilir, bu yüzden esnek olun ve çocuğunuzun fikirlerine açık olun. Aşağıdaki diyagram, 6 sayısının mümkün olduğunu gösteriyor.



Hızlı birkaç örnekle başlamak her zaman iyidir. Büyük bir kareyi eşit büyüklükte karelere bölerek başlamak kolay bir başlangıçtır. Bu yolla, tüm kare sayılarının (1, 4, 9, 16, 25, ...) mümkün olduğunu hemen görebiliriz.

6 karelik örnekten yola çıkarak, herhangi bir boyutta büyük bir kare alıp iki kenarına  $1 \times 1$  kareler yerleştirebiliriz. Bu işlemi giderek daha büyük karelerle yaparsak ( $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, \dots$ ),  $1 + 3 = 4, 1 + 5 = 6$  (diyagramda olduğu gibi),  $1 + 7 = 8, 1 + 9 = 10$  ve bu şekilde devam eder. Yani, 4'ten başlayan tüm çift sayılar bu yöntemle elde edilebilir.

Bu soruyu hızla genelleştirmenizi sağlayan güçlü bir fikir, çalışan bir diyagramı alıp içindeki karelerden birini, yine çalışan başka bir diyagramla değiştirmektir. Örneğin, dört adet  $1 \times 1$  kareyle doldurulmuş basit bir  $2 \times 2$  kare düşünün. Bu  $1 \times 1$  karelerden birini 6 kareli örnekle değiştirirseniz, sağda gösterilen ve toplamda 9 kare içeren diyagramı elde edersiniz.



Burada aslında bir kare,  $n$  kareli bir diyagramla değiştirilmiş olur, dolayısıyla kare sayısındaki net değişim  $n - 1$  olur. Bu da demektir ki, işe yarayan bir sayıyı alabilir ve başka işe yarayan bir sayıya bu değer bir eksiğinin katlarını ekleyebilirsiniz. Özellikle,  $4 - 1 = 3$ 'ün katlarını, çalışan diğer herhangi bir sayıya eklemek mümkündür ve 3 eklemenin en kolay olduğu sayılar, 4'ten başlayan tüm çift sayılardır.

Tüm bunları birleştirdiğimizde, 1, 4, 6, 7, 8, 9, ... gibi sayıların hepsinin mümkün olduğunu ve her biri için en az bir basit yapım yöntemi görülebileceğini söyleyebiliriz. Ayrıca, 2, 3 ve 5'in mümkün olmadığını kendinize kanıtlamak da oldukça kolaydır.

Çocuğunuz bu soruyu keşfetmekten keyif alıyorsa, bu temanın farklı varyasyonlarını da inceleyin. Örneğin, yalnızca belirli boyutlardaki karelere ( $1 \times 1, 2 \times 2$  ve  $3 \times 3$  gibi) izin verdiğiniz düşünün. Ya da sadece  $2 \times 2$  ve  $3 \times 3$  karelere izin verin. Hangi soruların ilginç sonuçlara yol açıp açmadığını gözlemleyin.

Buna benzer başka bir yönelim de, farklı şekilleri yine kendi şeklinde parçalarla doldurmaktır. Örneğin, aynı soruyu eşkenar üçgenler (tüm kenarları eşit olan üçgenler) için sorun. Bazı şekiller bu şekilde araştırıldığında oldukça ilginç sonuçlar verirken, bazıları ise hiç ilgi çekici olmayabilir – sizce hangileri?

# Bölüm 5 – Çarpım Oyunu

## — Giriş —

Aşağıdaki şekilde hazırlanmış ortak bir kâğıt kullanın:

İlk oyuncu, alt sıradaki 1–9 karelerinden birine bir taş yerleştirir. İkinci oyuncu, alt sıradaki 1–9 karelerinden birine başka bir taş koyar ve 6x6'lık ızgarada oluşan çarpımın bulunduğu kareyi alır. Bundan sonra, her oyuncu sırayla iki taştan birini hareket ettirip, mümkünse çarpımın bulunduğu kareyi alır. Bir sırada 3 kareyi alan ilk oyuncu oyunu kazanır. Çocuğunuzun çarpımları daha iyi tanınması için 6x6'lık ızgaradaki çarpım sayılarını karıştırabilirsiniz.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
54	56	63	64	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Bu oyun tahtaları istediğiniz kadar büyütülebilir, ancak boyutları oldukça hızlı şekilde artar. Aşağıda, daha büyük sayı aralıklarıyla birlikte hazırlanmış birkaç büyük tahta örneği yer almaktadır.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	12	14
15	16	18	20	21	24
25	27	28	30	32	35
36	40	42	45	48	49
50	54	56	60	63	64
70	72	80	81	90	100

★	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	14
15	16	18	20	★	21	22
24	25	27	28	30	32	33
35	36	40	42	44	45	48
49	★	50	54	55	56	60
63	64	66	70	72	77	80
81	88	90	99	100	110	121

★	1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	★	12	14	15
16	18	20	21	22	24	25	27
★	28	30	32	33	35	36	40
42	44	45	48	★	49	50	54
55	56	60	63	64	66	70	72
★	77	80	81	84	88	90	96
99	100	108	110	120	121	132	144

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

Kırmızı yıldızlı kareler “serbest” karelerdir ve gerektiğinde her iki taraf da bu kareleri kullanabilir.

# Bölüm 5 – Sınırlı Hesap Makineleri

## — Giriş —

Diyelim ki bozuk bir hesap makineniz var ve size bu makineyle belirli bir sonuç üretme görevi verildi. Basit bir bulmaca tanımıyla, ilginç zorluklar sunabilecek pek çok senaryo oluşturabilirsiniz. Bu etkinlik, boş vakitlerde sözlü olarak oynanması oldukça kolay bir oyundur. Başlamanız için bazı örnekler aşağıda yer alıyor.

Bu sorular zaman zaman daha derin matematiksel kavramlara değinse de, çoğunlukla sadece eğlence amaçlıdır.

1a) Diyelim ki +, -, × ve ÷ işlemlerini yapabilmek ancak yalnızca bir çalışan sayı tuşu olan bir hesap makineniz var, bu da 4. 21 sonucunu elde edebilir misiniz? Eğer edebiliyorsanız, bunu en az kaç adımda yapabilirsiniz?

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4/4 = 21$  bir yöntemdir, ama bu sonucu elde etmenin başka birçok yolu da vardır. Örneğin  $4 \times (4 + 4/4) + 4/4$ . Buradaki amaç farklı çözümler denemek ve oyunun tadını çıkarmaktır.

1b) Diyelim ki 4 sayısını en fazla dört kez kullanabiliyorsunuz. Hangi sayıları elde edebilirsiniz? Farz edelim ki 4'ü tam olarak dört kez kullanmanız gerekiyor.

Çocuğunuzun matematiksel becerileri geliştikçe, “dört tane 4” problemi eğlenceli bir bulmaca hâline gelir. Bu noktada çocuğunuzun seçenekleri sınırlı olabilir, ama keşfetmek hâlâ oldukça keyiflidir. Bölme ya da ondalık kullanmadan bazı sayıları oluşturmak zor olabilir. Tüm sayıları sırayla oluşturmayı dert etmeyin ve mümkün olduğunca çok farklı sayı üretmeye çalışın.

Başlamanız için işte birkaç örnek:

$$1 = (4/4) \times (4/4) = 44 / 44$$

$$2 = 4 / ((4 + 4) / 4)$$

$$3 = (4 + 4 + 4) / 4$$

$$4 = (4 - 4) \times 4 + 4$$

$$6 = 4 + (4 + 4) / 4$$

$$7 = 44 / 4 - 4$$

$$8 = (4 + 4) \times (4/4) = 4 + 4 + 4 - 4$$

$$32 = 4 \times 4 + 4 \times 4$$

1c) Farklı bir sayı kullanarak başka sonuçlar elde etmeyi deneyin.

2a) Hesap makineniz yalnızca 4 ve 7 toplayabilseydi, hangi sayıları elde edebilirsiniz?

Bu, şimdiye kadar birkaç kez karşılaştığımız bir durumdur.  $(4 - 1) \times (7 - 1)$  değerinden başlayarak, 4 ve 7'nin katlarını kullanarak tüm sayılara ulaşabilirsiniz.  $18 = 2 \times 7 + 4$ ,  $19 = 3 \times 4 + 7$ ,  $20 = 5 \times 4$ ,  $21 = 3 \times 7$ , vb.

2b) Eğer yalnızca 4 ve 7 kullanılabilir ama toplama ve çıkarma yapılabiliyorsa?

Bu şekilde tüm sayılar üretilebilir.

2c) 4 ve 7'yi başka sayı çiftleriyle değiştirin. Bu yeni çiftlerle neler olur?

Sayı Teorisi'nde bu, Bézout Teoremi olarak bilinir. Bu teorem, iki sayının katlarını birleştirerek, o sayıların en büyük ortak böleninin her katını elde edebileceğinizi söyler.

3) Elinizde yalnızca 1 tuşu olsaydı ve sadece toplama ya da iki katına çıkarma işlemleri yapabilseydiniz? Örneğin,  $2 \times (2 \times 1) + 1 = 5$ . Başka hangi sayıları elde edebilirsiniz?

Bu aslında ikili (binary) sayı sistemiyle ilgili gizli bir sorudur. Çocuğunuzun bunu fark etmesi veya anlaması gerekmiyor – sadece eğlenerek deneme yapmak için var. Her sayı ikili biçimde ifade edilebilir, bu nedenle yalnızca iki katına çıkarma ve 1 ekleme yoluyla tüm sayılar üretilebilir. Örneğin,  $21 = 16 + 4 + 1$ . Yani,  $21 = 2 \times (2 \times (2 \times 1) + 0) + 1) + 0) + 1$ .

# Bölüm 5 – Ya Hep Ya Hiç

## – Giriş –

Oyuncular oyuna, 20'den büyük ve 120'den küçük 5 farklı sayıyı gizlice seçerek başlar. Bu sayılar belirlendikten sonra, herkesin görebileceği bir yere yazılır. Sayı Kartları veya başka bir araç yardımıyla 1 ila 20 arasında rastgele bir sayı belirlenir. Ya ilk kez bir oyuncunun seçtiği sayıya ulaşılan kadar ya da sayı 120'yi aşana kadar bu sayı sürekli olarak ikiye katlanır. Beş sayının tamamına ilk ulaşılan oyuncu oyunu kazanır.

## – Analiz –

Soru şu: Seçilebilecek en iyi beş sayı hangileridir? İşte düşünülmesi gereken bazı fikirler:

**Kural:** Her zaman, 2'nin kuvveti ile 1–20 arasındaki bir sayının çarpımı olan bir sayı seçin.

Eğer 23 veya 46 gibi bir sayı seçerseniz, bu sayılara hiçbir zaman ulaşamaz ve oyunu kaybetmeniz kaçınılmaz olur.

**Kural:** Seçebileceğiniz ama seçmediğiniz başka bir sayının iki katı olan bir sayıyı asla seçmeyin.

Mesela 44'ü seçtiyseniz, neden 22'yi seçmediniz? Diğer oyuncu 22'yi seçmişse, siz bir tur kaçırsınız.

**İleri düzey analiz:** 1'den 20'ye kadar olan sayıların seçilme olasılıkları eşittir. Ancak bazı sayılar, diğerlerine göre daha fazla başlangıç yoluna sahiptir. Örneğin,  $9 \rightarrow 18$  yapar, yani 18 başlangıç noktası olarak 11'den iki kat daha olasıdır. Aşağıda, her başlangıç noktasının hangi yollarla gelebileceği ve tahmini olasılıkları verilmiştir:

11 -  $1/20$  (sadece 11'den)

12 -  $3/20$  (3, 6 ve 12'den)

13 -  $1/20$  (13'ten)

14 -  $2/20$  (7 ve 14'ten)

15 -  $1/20$  (15'ten)

16 -  $5/20$  (1, 2, 4, 8 ve 16'dan)

17 -  $1/20$  (17'den)

18 -  $2/20$  (9 ve 18'den)

19 -  $1/20$  (19'dan)

20 -  $3/20$  (5, 10 ve 20'den)

Açıkça görülüyor ki, en iyi seçimler 16, 12 ve 20'nin katlarıdır. Basit bir strateji bu beş sayıyı kullanmaktır: 32, 64, 24, 48 ve 40. Bu sayılar her zaman kazanmasa da, uzun vadede sizi oldukça başarılı kılacaktır.